

Определение страхового запаса в случае нестабильного спроса и неопределенности времени доставки

Автор: А.А.Шаврин

В каждой компании, где есть нестабильное потребление или вероятностный характер спроса, создается некоторый запас сырья или товаров для обеспечения непрерывности работы и наиболее полного удовлетворения клиента. Страховой запас позволяет предотвратить перебои в работе компании, но, с другой стороны, страховой запас является источником дополнительных расходов на приобретение и хранение товара. Таким образом, для оптимизации складских расходов необходимо как можно точнее определять размер страхового запаса.

Как правило, учитываются один-два фактора неопределенности в потреблении товаров. Первым является неопределенность физического спроса (потребления), вторым - неопределенность срока доставки. Начнем с неопределенности потребления. Рассмотрим два, ставших классическими, метода управления страховыми запасами. Оба метода основаны на различных способах определения уровня обслуживания.

Первый способ связан с вероятностью истощения запаса¹:

$$S_{\alpha} = 1 - \int_R^{\infty} f(x) dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ – плотность вероятности спроса в течение некоторого периода времени. Как правило, при значительном периоде времени исследования спроса и большом потреблении, плотность вероятности можно приблизить нормальным законом распределения:

$$n_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(m-x)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (2)$$

где m – средний уровень потребления за интервал времени, σ – среднеквадратичное отклонение (СКО) спроса на том же интервале времени.

¹ Иногда данный уровень обслуживания называют: "уровнем обслуживания первого типа" или " α – уровень".

После подстановки (2) в определение (1) и произведя замену переменных $R = m + \sigma Z$, получим:

$$R = m + \sigma N_{0,1}^{-1}(S_\alpha), \quad (3)$$

где $N_{0,1}$ – интеграл вероятности нормального распределения (2) со средним равным нулю и СКО равным единице, а $N_{0,1}^{-1}$, соответственно, обратная функция. Если задать определенный допустимый уровень обслуживания S_α , скажем 90% (вероятность того, что покупатель сможет получить товар со склада немедленно, равна 0.9), то при известном параметре СКО спроса, на определенном периоде сразу получаем величину страхового запаса W на заданном периоде:

$$W_I = \sigma N_{0,1}^{-1}(S_\alpha) \quad (4)$$

Например, при СКО равном 100 единиц и уровне сервиса $S_\alpha = 90\%$ получаем страховой запас $W_I = 100 \times 1,28155... \cong 128$ единиц товара.

Второе определение уровня обслуживания связано с уровнем наполнения². Уровень обслуживания S_β определяется как доля количества товара поставляемого со склада немедленно к общему количеству заказов. На практике различают три разновидности уровня пополнения:

- отношение числа строк выполненных заказов к общему числу строк заказов
- отношение количества сразу отгруженного (без ожидания доставки) товара к общему количеству заказанного товара
- отношение стоимости сразу отгруженного товара к общей стоимости заказанного товара

Не теряя общности, сконцентрируем внимание на втором варианте определения. При известной функции распределения спроса на исследуемый период времени можно определить величину дефицита запаса:

$$\int_R^\infty (x - R) f(x) dx \quad (5)$$

² Данный тип уровня обслуживания иногда называется вторым или " β уровень обслуживания".

Соответственно, уровень сервиса S_β определится так:

$$S_\beta = 1 - \frac{1}{m} \int_R^\infty (x - R) f(x) dx . \quad (6)$$

Используя в качестве первого приближения нормальный закон распределения (2) и производя замену переменных $R = m + \sigma Z$, получим:

$$R = m + \sigma \mathcal{L}_{0,1}^{-1} \left(\left(1 - S_\beta \right) \frac{m}{\sigma} \right) , \quad (7)$$

где $\mathcal{L}_{0,1}$ стандартная функция затрат:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0,1}(Y) &= \int_Y^\infty (x - Y) n_{0,1}(x) dx \\ &= n_{0,1}(Y) - Y(1 - N_{0,1}(Y)) \end{aligned} , \quad (8)$$

а $\mathcal{L}_{0,1}^{-1}$ – функция обратная стандартной функции затрат. Пользуясь определением (7) величина страхового запаса определится в виде:

$$W_{II} = \sigma \mathcal{L}_{0,1}^{-1} \left(\left(1 - S_\beta \right) \frac{m}{\sigma} \right) . \quad (9)$$

Несмотря на то, что стандартная функция затрат $\mathcal{L}_{0,1}$ не всегда входит в число стандартных статистических функций математических пакетов, её всегда можно вычислить из определения (8), равно как и обратную ей функцию. В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда задан уровень обслуживания S_β , равный 95% (95% случаев товар отгружается сразу по получении заказа) средняя величина спроса m равна 2500 единиц, СКО 720 единиц для исследуемого периода. Подстановка данных в (9) дает:

$$\begin{aligned} W_{II} &= 720 \times \mathcal{L}_{0,1}^{-1} \left((1 - 0,95) \frac{2500}{720} \right) = \\ &= 720 \times \mathcal{L}_{0,1}^{-1}(0,1736...) \cong 720 \times 0,58... \cong 418 \end{aligned} .$$

Заметьте, что аналогичные вычисления страхового запаса, проведенные для того же значения уровня сервиса первого типа, дают совершенно другой результат:

$$W_I = 720 \times N_{0,1}^{-1}(0,95) = 720 \times 1,64... \cong 1184 .$$

Такая существенная разница связана с тем, что страховой запас первого типа предназначается для предотвращения обнуления запасов на складе, а

страховой запас второго типа – для достижения желаемого уровня обслуживания клиентов. В зависимости от этих целей и следует выбирать тот или иной метод расчета страхового запаса.

Для того чтобы лучше понять разницу двух определений рассмотрим предельный случай нормального распределения. Предположим, что неопределенность потребления, а, следовательно, СКО, стремится к нулю. Это означает, что точность определения среднего потребления за период (m) растет. Для I типа уровня сервиса, пользуясь определениями (1) и (2) запишем:

$$\begin{aligned} S_{\alpha} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(1 - \int_R^{\infty} n_{m,\sigma}(x) dx \right) = \\ &= 1 - \int_R^{\infty} \delta(m-x) dx = 1 - \theta(m-R) \end{aligned} \quad (10)$$

где $\delta(x)$ – дельта функция Дирака³, а $\theta(x)$ – функция Хевисайта⁴.

Аналогично, для II типа уровня сервиса пользуясь определениями (2) и (6) запишем:

$$\begin{aligned} S_{\beta} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{m} \int_R^{\infty} (x-R) n_{m,\sigma}(x) dx \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{m} \int_R^{\infty} (x-R) \delta(m-x) dx = \\ &= 1 - \frac{1}{m} (m-R) \theta(m-R) \end{aligned} \quad (11)$$

где $\delta(x)$ – дельта функция Дирака, а $\theta(x)$ – функция Хевисайта. На графике ниже (Рисунок 1) представлены два типа уровня сервиса при отсутствии неопределенности в потреблении. Для простоты предположим, что $m = 1$.

³ Предельная функция равная нулю всюду кроме нуля. Интеграл от этой функции равен единице. Более подробную информацию можно получить на сайте: [Weisstein, Eric W. "Delta Function."](http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html) From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html>

⁴ Функция "ступенька" равна нулю при отрицательных значениях аргумента и единице при положительных. Более подробную информацию можно получить на сайте: [Weisstein, Eric W. "Heaviside Step Function."](http://mathworld.wolfram.com/HeavisideStepFunction.html) From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/HeavisideStepFunction.html>

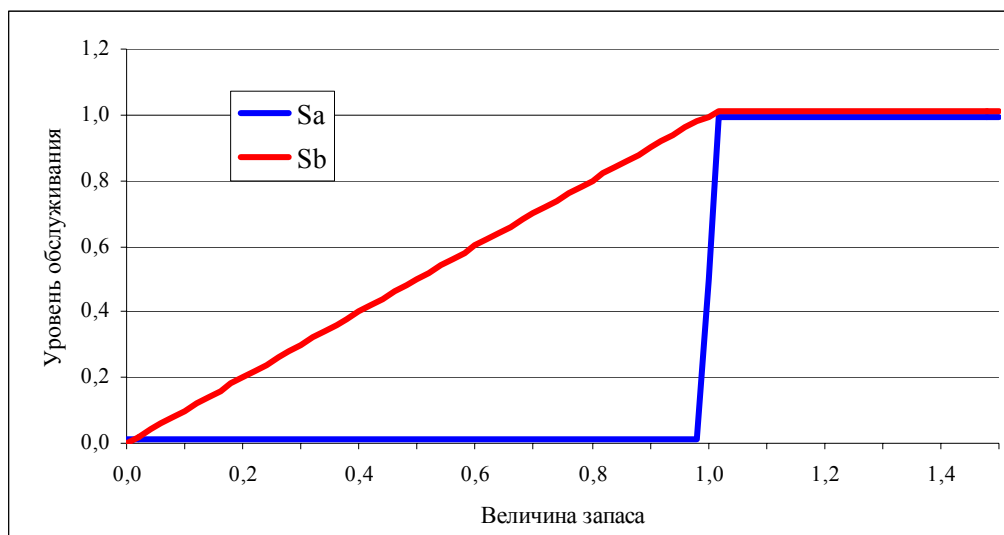


Рисунок 1

Из предложенного графика видно, что при отсутствии неопределенности в потреблении, уровень сервиса I типа (на графике обозначен S_a) может принимать только два значения: единица и ноль. Это соответствует либо полному удовлетворению спроса (100%), либо полному его не удовлетворению (0%). В случае использования уровня сервиса II типа (на рисунке 1 обозначен S_b) мы имеем постепенное "наполнение" от нуля до единицы в зависимости от объема запаса R (см. функция (11)).

Следовательно, два различных типа уровня сервиса соответствуют двум разным подходам к уровням запаса. Первый тип S_α соответствует более "жесткому" варианту – товар всегда должен быть на складе. Второй тип уровня сервиса S_β более "мягок" – требуется иметь достаточное количество товара для удовлетворения не всей потребности, а $S_\beta \times 100\%$ полного потребления. При этом $W_\beta = R - m$ становится отрицательным для любых значений R . Это можно трактовать как отсутствие необходимости в запасе, а величина отрицательного значения будет определять, насколько надо уменьшить запас (относительно точно определенного спроса m) для достижения заданного уровня сервиса. Наличие неопределенности в потреблении приводит к тому, что 100% уровень удовлетворения спроса становится недостижимым для обоих вариантов. Вопрос выбора того или

иного критерия всегда лежит в области ответов на вопрос: "Что будет, если данного товара нет на складе?"

Для дальнейшего рассмотрения усложним задачу, приблизив её к реально существующей проблеме случайного времени доставки товара. Предположим, что в некоторые периоды времени τ_i потребляется некоторое случайное количество товара X_i . Функция плотности вероятности потребления $f(x)$ непрерывна и не зависит от выбранного периода времени i . Количество временных интервалов определяется дискретной функцией вероятности $P\{t = n\tau\} = p_n$. Рассмотрим⁵ сумму случайного числа потребляемого товара X за случайное число интервалов времени $n = t/\tau$:

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i . \quad (12)$$

Учитывая, что плотность вероятности суммы n слагаемых равна свертке плотностей каждого из слагаемых, плотность вероятности потребления Z в течение случайного числа периодов времени можно записать так:

$$\varphi(Z) = \sum_{n=1}^N f^{(n)*}(Z) p_n . \quad (13)$$

, где $f^{(n)*}$ – есть n -я свертка функции распределения вероятности потребления в период τ . Пользуясь определениями среднего значения

$$\begin{aligned} m_X &= \int x f(x) dx \\ m_T &= \sum n p_n \end{aligned} \quad (14)$$

и дисперсии

$$\begin{aligned} D_X &= \int x^2 f(x) dx - m_X^2 \\ D_T &= \sum n^2 p_n - m_T^2 \end{aligned} \quad (15)$$

получим среднее и дисперсию распределения (13):

$$\begin{aligned} m_Z &= m_X m_T \\ D_Z &= D_X m_T + m_X^2 D_T \end{aligned} \quad (16)$$

Среднее значение распределения (11) это есть не что иное, как среднее потребление за период времени T (фактически, среднее время доставки),

⁵ Эта задача очень подробно рассмотрена в книге Е.С. Вентцеля [1] (задача №8.51 стр. 245).

измеренное в единицах времени τ . Учитывая, что среднее потребление линейно зависит от времени, среднее значение распределения (13) перепишем в виде:

$$m_Z = m_X m_T = m_0 \tau \times \frac{T}{\tau} = m_0 T = m_L, \quad (17)$$

где m_L является средним потреблением за среднее время поставки.

Аналогичным образом, рассматривая дисперсию распределения (13) и учитывая, что дисперсия объема продаж линейно зависит от времени (СКО пропорционально квадратному корню от времени) запишем:

$$\begin{aligned} D_Z &= D_X m_T + m_X^2 D_T = \\ &= D_0 \tau \times \frac{T}{\tau} + \left(m_0 \tau \frac{T}{\tau} \right)^2 D_T =, \\ &= D_0 T + (m_0 T)^2 \frac{D_T}{T^2 / \tau^2} \end{aligned} \quad (18)$$

введя обозначения $\sigma_L^2 = D_0 T - (\sigma_L \text{ СКО продаж за среднее время поставки})$ и учитывая, что дисперсия и среднее время поставки измеряются в одних и тех же единицах времени, окончательно запишем:

$$\sigma_z^2 = D_Z = \sigma_L^2 + m_L^2 \left(\frac{\sigma_T}{T} \right)^2. \quad (19)$$

Следовательно, с учетом уровня сервиса I типа S_α величина страхового запаса (4) при условии вероятностной поставки определится так:

$$W_I = \sqrt{\sigma_L^2 + m_L^2 \left(\frac{\sigma_T}{T} \right)^2} N_{0,1}^{-1}(S_\alpha), \quad (20)$$

где m_L и σ_L соответственно среднее значение и СКО потребления за среднее время поставки T имеющей СКО равное σ_T . Очевидно, что при уменьшении неопределенности во времени поставки ($\sigma_T \rightarrow 0$) страховой запас будет стремиться к своему первоначальному значению, определяемому уравнением (4). В случае уровня сервиса II типа S_β , страховой запас будет вычисляться по формуле

$$W_{II} = \sigma_z \mathcal{L}_{0,1}^{-1} \left((1 - S_\beta) \frac{m_L}{\sigma_z} \frac{T_c}{T} \right), \quad (21)$$

где T_c – среднее время между двумя заказами (или среднее время цикла), а σ_z определяется в (19). Остальные обозначения аналогичны уравнению (20). Множитель T_c / T в уравнении (21) возникает из естественного предположения, что все запросы клиентов удовлетворяются полностью до момента заказа поставки для пополнения запасов. Как и в случае с W_I , страховой запас будет стремиться к уровню, определяемому колебаниями спроса при уменьшении неопределенности во времени поставки.

Для примера рассмотрим следующую ситуацию: Необходимо определить уровень страхового запаса, исходя из уровня сервиса I типа равного 97% ($S_\alpha = 0,97$). Среднегодовое потребление составляет 79'300 единиц с СКО в 5'300 единиц. Есть следующие вероятности доставки товара: в 1 неделю 0.05, во вторую 0.4, в третью 0.3, в четвертую 0.2 и в пятую 0.05. Пользуясь уравнением (14) для определения среднего значения времени поставки

$$T = 1 \times 0,05 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,3 + 4 \times 0,2 + 5 \times 0,05 = 2,8$$

получим 2,8 недели, дисперсия из уравнения (15)

$$\sigma_T^2 = 1^2 \times 0,05 + 2^2 \times 0,4 + 3^2 \times 0,3 + 4^2 \times 0,2 + 5^2 \times 0,05 - 2,8^2 = 0,96$$

СКО равно 0,98 недели. Учитывая, что в году 51 неделя, получаем среднее недельное потребление $m_w = 79300 / 51 = 1555$ единиц, что дает

$$m_L = 2,8 \times m_w = 2,8 \times 1555 \cong 4354 \text{ единицы за средний период доставки. Немного}$$

сложнее обстоит дело со стандартным отклонением. Дисперсия годового показателя, равная квадрату СКО, равняется $D_y = 5'300^2 = 28'090'000$

приведенная на среднюю величину периода поставки (2,8 недели) составит:

$$D_L = T \times D_y / 51 = 2,8 \times 28'090'000 / 51 \cong 1'542'196, \text{ что дает СКО на средний период}$$

поставки $\sigma_L = \sqrt{D_L} = \sqrt{1'542'196} \cong 1242$ единиц товара. Подставляя полученные

данные в уравнение (19), получим дисперсию потребления во время поставки

$$\sigma_z^2 = \sigma_L^2 + m_L^2 \left(\frac{\sigma_T}{T} \right)^2 = 1'542'196 + 4354^2 \left(\frac{0,98}{2,8} \right)^2 = 1'542'196 + 2'321'011 = 3'863'207. \text{ Зная}$$

значение СКО, можем определить уровень страхового запаса:

$$W_I = \sqrt{\sigma_L^2 + m_L^2 \left(\frac{\sigma_T}{T} \right)^2} N_{0,1}^{-1}(S_\alpha) = \sqrt{3'863'207} \times N_{0,1}^{-1}(0,97) = 1966 \times 1,880... \cong 3697 \text{ единиц}$$

товара.

Заключение

Необходимо отметить, что применимость уравнений (21) и (22) ограничивается предположением о том, что распределение вероятности в период доставки будет нормальным. Несмотря на широкое применение, было бы ошибочно ожидать соответствия этого предположения практике.

Причиной тому являются:

- отличие от нормального распределения вероятности спроса при малых временах доставки – может сказаться низкое число продаж в единицу времени
- функция распределения времени доставки не является нормальной

Более того, в предложенных моделях расчета страхового запаса никак не учтены средний объем разового потребления и среднее время между актами потребления (что становится важным при малых временах доставки).

Необходимость задать область применимости полученных страховых запасов приводит к следующим *качественным* оценкам:

- в связи с тем, что совместное распределение $\varphi(Z)$, уравнение (13), локализовано, его *можно приблизить нормальным распределением* с параметрами, заданными уравнениями (17) и (19). Точность полученного приближения возможно оценить только при изучении фактических распределения потребления и времени доставки
- для того, чтобы полученные оценки были справедливы, необходимо потребовать, чтобы распределение потребления на исследуемом промежутке времени (времени доставки и/или времени между заказами) $f(x)$ можно было приблизить нормальным распределением с заданной точностью

Последнее требование задаёт минимальный уровень точности определения уровня страхового запаса. Исходя из доводов приведенных в [6] для достижения 1% точности на периоде времени L , как минимум необходимо $m_L > 2,33\sigma_L$. Для 5% точности условие смягчается до $m_L > 1,64\sigma_L$. Фактическая точность страхового запаса будет значительно ниже минимального уровня и будет определяться "качеством" приближения функции $\varphi(z)$ нормальным распределением.

Литература

1. Вентцель Е.С. Овчаров Л.А. Теория Вероятностей. – М. "Наука", 1969
2. Гл. ред. Виноградов И.М. Математическая Энциклопедия. – М. "Советская Энциклопедия", 1977. т. 1 – 5.
3. Мадера А.Г. "Как рассчитать величину страхового запаса" – <http://www.logist.ru/publication/dnews.pl?action=news&id=228>
4. Таха Хемди А. Введение в Исследование Операций, 7-е издание. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. – "Мир", 1964. т. 1-2
6. Шаврин А.А. "Распределение продаж по объему при непоследовательном спросе" Логистика&Система, 2006, №9
7. Chopra S., Reinhardt G., Dada M. "The Effect of Lead Time Uncertainty on Safety Stocks", Decision Sciences, Volume 35, Number 1, February 2004, pp. 1-24(24)
8. Garret J. Van Ryzin. "Analyzing inventory cost and service in supply chains" Columbia business school. Teaching Note, April 2001.
9. Thomopoulos N. "Supplier Lateness, Service Level and Safety Time", Journal in research in Engineering and technology Vol.2 No.4 2006
10. Wilkinson, S. "Service Level and Safety Stock Based on Probability", BPICS Control Vol 22; No.3 1996