

Оптимальность решения по Вильсону.

Рассмотрим, как влияет оптимальность решения в классической задаче экономического размера заказа на суммарные затраты.

Суммарные затраты на единицу времени, как функция объема заказа запишется так:

$$TCU(y) = CD + KD/y + hy/2 \quad (1)$$

где, C – стоимость единицы товара, D – интенсивность спроса, измеряемая в единицах на время, K – затраты на оформление, h – затраты на хранение единицы товара в единицу времени. В результате оптимизации, мы получили оптимальный уровень заказа:

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \quad (2)$$

Для дальнейшего рассмотрения введем $y = \alpha y^*$, где α – является параметром "не оптимальности". Когда $\alpha = 1$, мы получаем оптимальное, в смысле классической задачи, решение уровня запаса. При любом другом положительном значении параметра, получим неоптимальное значение уровня заказа.

Относительное изменение затрат на единицу времени запишем так:

$$\delta TCU(y) = \frac{TCU(y) - TCU(y^*)}{TCU(y^*)} \quad (3)$$

Подставив оптимальное решение (2) в исходное уравнение (1) получим:

$$\begin{aligned} TCU^* = TCU(y^*) &= CD + KD\sqrt{\frac{h}{2KD}} + \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2KD}{h}} = \\ &= CD + 2\sqrt{\frac{hKD}{2}} = CD + \sqrt{2hKD} \end{aligned} \quad (4)$$

аналогично, для $y = \alpha y^*$, запишем:

$$TCU = TCU(y) = CD + \sqrt{2hKD} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right) \quad (5)$$

Подставим полученные выражения (4) и (5) в (3), что дает:

$$\begin{aligned}\delta TCU &= \frac{CD + \sqrt{2hKD} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right) - CD - \sqrt{2hKD}}{CD + \sqrt{2hKD}} = \\ &= \frac{\sqrt{2hKD} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right) - 1 \right\}}{CD + \sqrt{2hKD}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right) - 1}{1 + \frac{CD}{\sqrt{2hKD}}}\end{aligned}\quad (6)$$

Попытаемся упростить дробное выражение в знаменателе:

$$\frac{CD}{\sqrt{2hKD}} = \frac{C}{2K} \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \frac{Cy^*}{2K} \quad (7)$$

получившееся соотношение (затраты на закупку y^* единиц товара на двойные затраты на оформление), обычно, значительно больше единицы. Окончательно запишем (6) в следующем виде:

$$\delta TCU = \frac{2K}{Cy^*} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right) - 1}{1 + \frac{2K}{Cy^*}} \quad (8)$$

учитывая малость параметра (7), мы можем записать (8) с точностью до второго порядка малого параметра:

$$\delta TCU = \frac{2K}{Cy^*} \left(1 - \frac{2K}{Cy^*} + O\left(\frac{2K}{Cy^*}\right)^2 \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right) - 1 \right\} \quad (9)$$

Пользуясь определением для $\alpha = y / y^*$, уравнение (9) можно записать так:

$$\delta TCU = \frac{2K}{Cy^*} \left(1 - \frac{2K}{Cy^*} + O\left(\frac{2K}{Cy^*}\right)^2 \right) \frac{(y^* - y)^2}{2yy^*} \quad (10)$$

впрочем, простота полученного выражения в (10) весьма спорна. Практически удобнее использовать (9).

Оценим получившийся результат по данным из учебных задач. Пусть дано: $C = 2,5\$$, $K = 10\$$, $y^* = 100 pcs$, $\alpha = 1/2$ & 2. Выражение в фигурных скобках уравнения (9) для двух значений параметра α будет одинаково и равняется: $1/2(2 + 1/2) - 1 = 1/4$. Вычислим параметр (7): $\frac{2 \cdot 10}{2,5 \cdot 100} = 0,08$.

Окончательно, подставив результаты вычислений в (9), получим¹:

$$\delta TCU \approx 0,08(1 - 0,08)0,25 = 0,0184 \quad (11)$$

Этот результат показывает, что при предложенных условиях, изменение уровня заказа в два раза (неважно в большую или меньшую сторону) приводит к общим изменениям в затратах не превышающим 2%(!).

Данные этого расчета позволяют сделать вывод, что важен не сам экономический размер запаса, а выводы сделанные на основании данного приближения. Например, уровень страхового запаса, точка дозаказа и т.д.

¹ Точное решение в уравнении (8) дает: 0,0(185) – очень близкое к полученному приближению.