

## Скидка.

Столкнулся с одной интересной проблемой. Поставщик предоставил скидку на товар, если объем закупки превысит некоторое значение  $q$ . Общий размер скидки – пара тысяч долларов (на дороге не валяются), но товар будет лежать на складе и деньги будут отвлечены на больший срок. Возникла идея рассчитать по простейшему варианту и определить как изменятся относительные затраты на единицу товара в единицу времени. Итак, считаем, что мы осуществляем закупки оптимальным образом в объеме  $y_o$ . Известен потребляемый объем товара в месяц  $D$  и стоимость хранения единицы товара на складе в течении месяца  $h$ . Вопрос – определить диапазон, когда выгодно приобретать товар со скидкой и на сколько изменятся относительные затраты в процентах.

Цена на товар определена так:

$$\begin{array}{ll} C_1 & y < q \\ C_2 & y \geq q \end{array} \quad (1)$$

Прежде всего определимся с функциями затрат на единицу времени.

$$TCU(y) = DC + \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}y \quad (2)$$

Здесь,  $K$  являются постоянными затратами на заказ. В нашем случае эта величина неизвестна, для её нахождения используем формулу EOS<sup>1</sup>.

$$y_o = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \quad (3)$$

Использував тот факт, что мы осуществляем оптимальные закупки объёмом  $y_o$ , перепишем уравнение (2) заменив постоянные затраты на их выражение через объем закупок. В случае цены  $C_1$  (оптимальный объем закупок без скидки):

$$TCU_1 = DC_1 + hy_o \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> Вильсона (Economical Order Size)

В случае скидки:

$$TCU_2(y_d) = DC_2 + \frac{h}{2} y_o^2 \frac{1}{y_d} + \frac{h}{2} y_d \quad (5)$$

Полученная функция имеет минимум в точке  $y_o$ , поскольку изменение цены закупки не влияет на оптимальность решения EOS. Но сама кривая, описываемая уравнением (5), лежит ниже аналогичной кривой описывающей закупки без скидки. Следовательно, существует диапазон значений  $y_d > y_o$ , где значение приведенных затрат будут меньше определенных в (4). Иными словами, Существует некоторое максимальное значение  $y_{Max}$ , объема закупок со скидкой, выше которого стоимость хранения товара будет превышать размер скидки. Эта величина может быть определена из уравнения:

$$TCU_1 = TCU_2(y_{Max}) \quad (6)$$

Уравнение (6) перепишем в следующем виде:

$$DC_1 + h y_o = DC_2 + \frac{h y_o^2}{2 y_{Max}} + \frac{h}{2} y_{Max} \quad (7)$$

Умножая обе части уравнения на  $\frac{2}{h} y_{Max}$ , получим:

$$D(C_1 - C_2) \frac{2}{h} y_{Max} = y_{Max}^2 - 2 y_{Max} y_o + y_o^2 \quad (8)$$

Решение этого уравнения запишется так:

$$y_{Max} = y_o + \alpha(1 + \sqrt{1 + 2 y_o / \alpha}) \quad (9)$$

где  $\alpha = D(C_1 - C_2) / h$  является обобщенным параметром дисконта для нашей системы. Таким образом, мы получили диапазон значений закупаемого объема, в котором мы будем иметь более низкое значение приведенных затрат. Если величина объёма, с которого начинается скидка, находится в диапазоне  $y_o \leq q \leq y_{Max}$ , то при закупке товара объемом  $q$ , мы будем иметь меньше затрат на единицу товара в единицу времени. Закупать товара больше, чем  $q$  единиц не имеет смысла, поскольку оптимальные значения функций затрат всегда будут лежать левее этой величины. И только благодаря скидке мы можем получить уменьшение затрат.

Определимся с относительной величиной уменьшения затрат. На сколько процентов изменятся затраты при использовании скидки. Определим изменение приведенных затрат так:

$$\delta TCU(q) = \frac{TCU_1 - TCU_2(q)}{TCU_1} 100\% \quad (10)$$

Воспользовавшись явным видом для записи функции затрат (4) и (5) получим:

$$\delta TCU(q) = \frac{\alpha - (q - y_o)^2 / (2q)}{C_1 h / D + y_o} 100\% \quad (11)$$

где параметр  $\alpha = D(C_1 - C_2) / h$  уже вводился ранее. Выражение (11) позволяет оценить величину уменьшения затрат при использовании скидки.

Приведем пример расчета по полученным формулам.

Дано:

Среднее потребление  $D$  3,5 тонны в месяц.

Стоимость хранения  $h$  составляет 15 долларов на тонну в месяц.

Обычная величина закупки  $y_o$  составляет 6 тонн.

Скидка предоставляется при покупке более 10 тонн товара.

Цена без скидки  $C_1$  составляет 3750 долларов за тонну.

Цена со скидкой  $C_2$  (покупка более 10 тонн) составляет 3550 долларов за тонну.

Максимальный объём закупки при существующей скидке рассчитаем по формуле (9). Параметр дисконта  $\alpha$  равен  $3.5(3750 - 3550) / 15 = 46.7$ , а

$$y_{Max} = 6 + 46.7 \cdot (1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 6 / 46.7}) \approx 105.$$

Мы находимся внутри диапазона  $y_o = 6 \leq q = 10 < y_{Max} = 105$ , следовательно, имеет смысл воспользоваться скидкой и закупать 10 тонн товара. Определим изменение относительной величины затрат по формуле (11)

Получаем:

$$\frac{46.7 - (10 - 6)^2 / (2 \cdot 10)}{3750 \cdot 3.5 / 15 + 6} \cdot 100\% \approx 5.21\%$$

Так скидка в 5.3% позволяет уменьшить затраты на 5.21%. По мере увеличения объема закупок от 10 тонн до 105 тонн, расходы растут и превысят первоначальные расходы при превышении отметки в 105 тонн. С другой стороны, следует отметить значительное отвлечение денежных средств на складской запас.